令和3年　大学入試共通テスト（数学II・数学B）の略解と解説

2021 年 2 月 2 日

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字で示す。

第1問.　［1］,（1）$\boxed{\textbf{問題 A}}$　関数　$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　の最大値を求めよ。

解答）　関数 sin による合成を示唆しているので，　$\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$　より，

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

となるので，　y は $\theta = \dfrac{\pi}{6}$　で最大値 2 をとる。

解説）三角関数の合成の簡単な問題。教科書の例題程度で，レベルは 3.5 位。受験者は皆できなくちゃならない問題。

(2) p を定数とし，次の問題 B を考える。

$\boxed{\text{問題 B}}$　関数　$y = \sin\theta + p\cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　の最大値を求めよ。

問題 A を発展させた問題だが，関数 cos での合成を求めている。

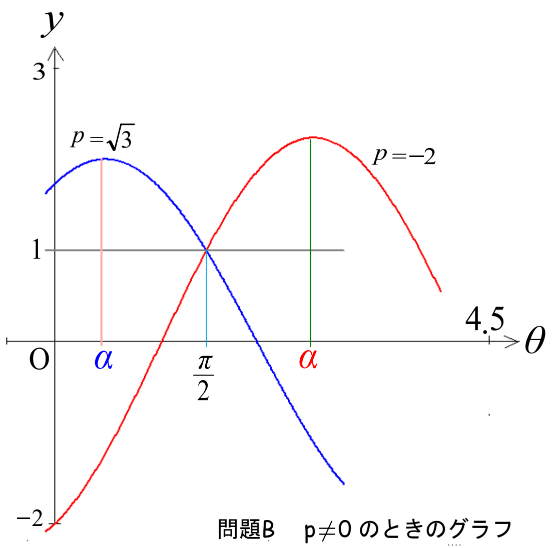
解答）(i) $p = 0$ のとき，$y = \sin\theta$　だから，　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　で最大値 1 をとる。

(ii) $p > 0$　のとき，関数 cos で合成する。

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{1+p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right) = \sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha). \cdots ①$$

ただし，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$，$\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$．　$\cdots$②

このとき，y は　$\theta = \alpha$　で最大値　$\sqrt{1+p^2}$　をとる。（下図，青いグラフ参照）



問題B　p≠0 のときのグラフ

(iii) $p < 0$　のとき，②より $\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$　だから，　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. (上図赤いグラフ参照)

従って，y は　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　で単調増加だから，　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　で最大値 1 をとる。

解説）(i) はレベル 4。(ii) は問題 A を一般化した問題だが，易しさは変わらない。ただ，関数 cos で合成式を作るのに慣れていない方もいるでしょう。レベル 3 の問題。(iii) では，①の頂点が $\pi/2$ より右にあることに気が付かなければいけない。考える区間では単調増加であることが分かりますか？レベル 3 の問題でしょう。(ii),(iii) は上の図を参照のこと。

［2］ 二つの関数 $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ についての問題。

(1) 解答） $f(0) = \dfrac{1+1}{2} = 1$, $g(0) = \dfrac{1-1}{2} = 0$. また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geqq \sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 1 \quad （\text{等号成立は } 2^x = 2^{-x} \text{ のとき，即ち } x = 0 \text{ のとき}）$$

だから，$x = 0$ で最小値 1 をとる。

$g(x) = -2$ を満たす x を求めよう。$\dfrac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2$ より，$X = 2^x$ とおくと，

$X - \dfrac{1}{X} = -4 \quad \to \quad X^2 + 4X - 1 = 0 \quad \to \quad X = -2 \pm \sqrt{5}.$

$X > 0$ だから $X = \sqrt{5} - 2 \quad \therefore \quad x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$ である。

(2) 解答） $f(-x) = \dfrac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x) \quad \cdots \quad$ ①

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x) \quad \cdots \quad ②$$

$$f(x)^2 - g(x)^2 = \frac{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}}{4} - \frac{2^{2x} - 2 + 2^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \cdots \quad ③$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{4} = 2\frac{(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x})}{4} = 2f(x)g(x). \quad \cdots \quad ④$$

(3) 解答） 太郎さんが考えた式が 4 つあげられている：

$$\begin{aligned}
f(\alpha - \beta) &= f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots \quad (A)\\
f(\alpha + \beta) &= f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots \quad (B)\\
g(\alpha - \beta) &= f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots \quad (C)\\
g(\alpha + \beta) &= f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots \quad (D)
\end{aligned}$$

上の 4 つの式に $\beta = 0$ を代入すると，(A) から (D) はそれぞれ次のようになる：

$$f(\alpha) = g(\alpha), \quad f(\alpha) = f(\alpha), \quad g(\alpha) = f(\alpha), \quad g(\alpha) = -g(\alpha)$$

2 番目の (B) 以外はすべて間違いである。(B) 式の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2} + \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2}\\
&= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{\alpha-\beta} + 2^{-\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{4} + \frac{2^{\alpha+\beta} - 2^{\alpha-\beta} - 2^{-\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{4}\\
&= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \text{左辺}
\end{aligned}$$

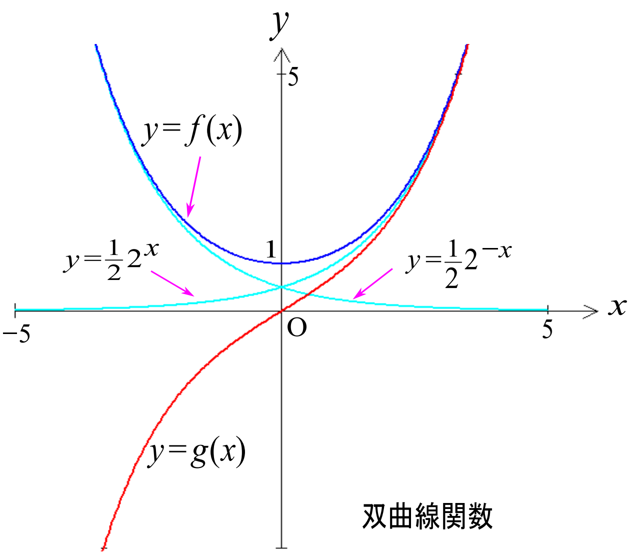
となるので正しいことが分かる。すなわち (B) 以外の三つは成り立たない。

解説）2 つの指数関数 $\dfrac{1}{2}2^x$, $\dfrac{1}{2}2^{-x}$ の和が $f(x)$ で，差が $g(x)$ である。数学 II の範囲の問題ではあるが，教科書ではほとんど扱わない問題なので，とまどった学生も多いだろう。しかし，難しくはない。$f(x)$ と $g(x)$ のグラフは下のようになる。$f(x)$ は y 軸対称，$g(x)$ は原点対称なので，三角関数のペア $\cos x$, $\sin x$ と性質が似ている部分があるかもしれません：

式③は，$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$　に，
式④は，$\sin 2x = 2\sin x\cos x$　に
式 (B) は，三角関数の加法定理に

似ていますね。大学では，$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，$g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　は，双曲線関数として扱われていて，複素変数に拡張された関数の下では，$f(x) = \cos ix$，$g(x) = -i\sin ix$　(i は虚数単位) となることが，分かっています。即ち，まったく三角関数の仲間なのです。

問題集や予備校などでは，こんな問題を扱っているかもしれませんね。一度やったことのある方は，すばやく解答できるでしょうね。(1) はちょっと計算があるのでレベル 2.5 くらいかな，(2),(3) は共にレベル 3 かな。



第 2 問.　（1）解答）　二つの 2 次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$　$\cdots$　①　（これの導関数は　$y' = 6x + 2$ ）
$y = 2x^2 + 2x + 3$　$\cdots$　②　（これの導関数は　$y' = 4x + 2$ ）

二つのグラフの共通点は，$x = 0$ のときの y の値が 3 であることと，微分係数の値が 2 であることより，次のことが分かる。

・y 軸との交点の y 座標は 3 である。
・y 軸との交点における接線の方程式は　$y = 2x + 3$　である。

（6 つの 2 次関数が与えられていて），y 軸との交点における接線の方程式が上の接線と同じになるものは，x の 1 次の項と，定数項が式①と同じであればいいので，$y = -x^2 + 2x + 3$　である。

a, b, c を 0 でない実数として，曲線　$y = ax^2 + bx + c$　上の点 $(0,\ c)$ における接線を l とすると，その方程式は $y = bx + c$ である。接線 l と x 軸との交点の x 座標は　$-\dfrac{c}{b}$　である。

a, b, c が正の実数のとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 l および直線　$x = -\dfrac{c}{b}$　で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \int_{-c/b}^{0} \{ax^2 + bx + c - (bx + c)\}dx = a\int_{-c/b}^{0} x^2\ dx = \frac{a}{3}\left[x^3\right]_{-c/b}^{0} = \frac{a\,c^3}{3\,b^3} \quad \cdots \quad ③$$

である。

③において，$a=1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b, c の値を変化させると，

$S=\dfrac{c^3}{3\,b^3}=k$（定数）より，$c^3=3kb^3$ $\quad\therefore\quad c=\sqrt[3]{3k}\,b$ だから，b と c の関係を表すグラフの概形は，⓪の直線である。

解説）まあ，面白くない問題だね。考えるところは何もないね。最後の $\boxed{\text{セ}}$ の問題などは，何のために作ったのかね。1 つの問題としてのストーリーがないね。レベル 3.5 だね。

(2) 解答）三つの 3 次関数を考える。

$$y=4x^3+2x^2+3x+5 \quad \cdots \quad ④$$
$$y=-2x^3+7x^2+3x+5 \quad \cdots \quad ⑤$$
$$y=5x^3-x^2+3x+5 \quad \cdots \quad ⑥$$

これら三つの関数のグラフの共通点は

・y 軸との交点の y 座標は 5 である。

・y 軸との交点における接線の方程式は $y=3x+5$ である。

a, b, c, d を 0 でない実数とする。曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0,\ d)$ における接線の方程式は $y=c\,x+d$ である。

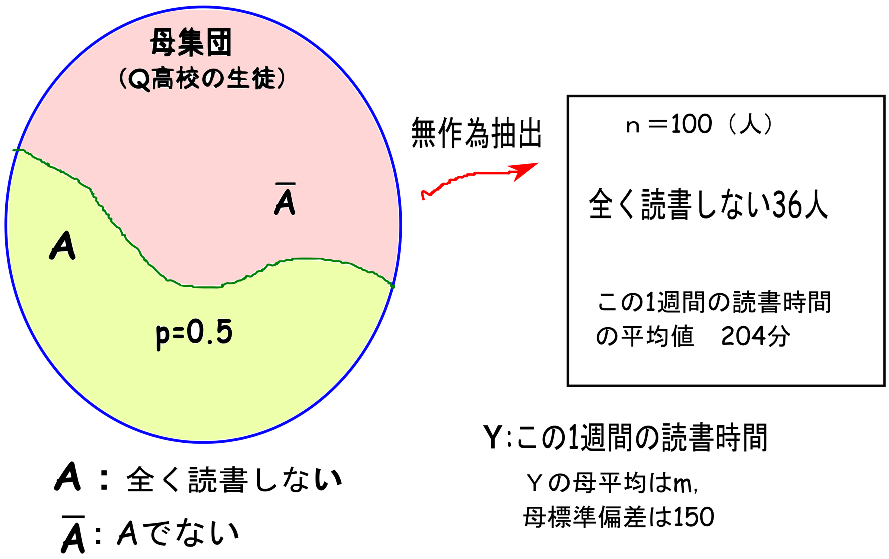
（上の三つの問は，(1) の問題と同じなので，あほみたいな問題.。こういう問題の繰り返しは，実につまらない。）

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ \ g(x)=cx+d$ とし，$f(x)-g(x)$ を考える。
$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。a, b, c, d が正の実数であるとき，$y=h(x)=(ax+b)x^2$ なので，この曲線は原点で x 軸に接し，原点近傍では 0 以上の値をとるので，グラフの概形は②である。

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，$h(x)=0$ を満たす x なので，$-\dfrac{b}{a}$ と 0 である。また，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，$h(x)$ が極大値をとる点なので，$h'(x)=(3ax+2b)x=0$ より $x=-\dfrac{2b}{3a}$ のときである。

解説）前半（$\boxed{\text{ソ}}$ から $\boxed{\text{ト}}$）は，(1) とほぼ同じ問で，ばかばかしい問題。なんでこんなの出すの（怒）。後半（$\boxed{\text{ナ}}$ から $\boxed{\text{ホ}}$）は，少し計算が必要だが，3 次関数の性質を知っていれば易しい問題。全体として，あまりいい問題ではない。まあ，レベル 3 というところか。

第３問　Q 高校の校長先生の調査：問題の設定・条件などを下図で示す。



第3問　母集団からの無作為抽出

解答）

(1) 全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を X とするとき，X は二項分布 $B(100, 0.5)$ に従う。また，X の期待値は　$np = 100 \times 0.5 = 50$，標準偏差は　$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0.5} = 5$ である。

(2) 標本の大きさ 100 は十分大きいので，確率変数 X は近似的に正規分布　$N(50, 5^2)$ ($p = 0.5$ のとき) に従う。全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_5 とするとき，これの近似値を計算する。

$Z = \dfrac{X-50}{5}$ より $z_0 = \dfrac{36-50}{5} = -2.8$. $p_5 = P(X \leqq -2.8) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2.8)$

$= 0.5 - 0.4974 = 0.0026$ (小数点以下 4 桁目を四捨五入して，答えは $p_5 = 0.003$)。

$p = 0.4$ のとき，全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_4 とおく。X は正規分布 $N(40, (2\sqrt{6})^2)$ で近似できるので，36 は標準化変数では $z_0 = \dfrac{36-40}{2\sqrt{6}}$. この値は上の $z_0 = -2.8$ より大きいので $p_4 > p_5$ である。

(3) 1 週間の読書時間の母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間を　$C_1 \leqq m \leqq C_2$ とおく。この信頼区間は，標本平均 $\overline{Y}$（これは確率変数）の分布　$N\left(m,\ \left(\dfrac{150}{\sqrt{100}}\right)^2\right) = N(m,\ 15^2)$　を使って計算できる。1 週間の読書時間の平均 (データ）が 204 より，

$C_1 = 204 - 1.96 \times 15 = 174.6$，　$C_2 = 204 + 1.96 \times 15 = 233.4$.

従って，$C_1 + C_2 = 408$，　$C_2 - C_1 = 58.8$　が分かる。

また，母平均 m と C_1, C_2 については，$C_1 \leqq m$ も $m \leqq C_2$ も成り立つとは限らない。なぜならば，信頼度 95 %の信頼区間というものは，95 %の確率で m を含むかもしれないという区間で，5 %位ははずれるということを意味するからである。

(4) Q 高校の図書委員会も，校長先生と同じ条件で 100 人の生徒を無作為抽出して，調査した。全

く読書をしなかった生徒の数を n とすると，③ n と 36 との大小関係は分からない。なぜならば，無作為抽出だから調査する度に n の値は変わり得るからである。

(5) 図書委員会が行った調査結果による母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間を　$D_1 \leqq m \leqq D_2$ とする。校長先生が調査して得た (3) の信頼度 95 %の信頼区間　$C_1 \leqq m \leqq C_2$　と比較したとき，正しいものは次の 2 つである。

② $D_2 < C_1$ 　または　$C_2 < D_1$　となる場合もある。

④ $C_2 - C_1 = D_2 - D_1$　が必ず成り立つ。

なぜならば，信頼区間は標本の平均値（データ）に依存してどんな値にもなり得るから。また，(3) で得た正規分布 $N(m,\ 15^2)$ で計算するので　$C_2 - C_1 = D_2 - D_1 = 2 \times (1.96 \times 15) =$ 一定だからである。

解説）(1) は二項分布の定義がわかっていれば，誰でもできる。レベル 4 です。(2) は近似する正規分布がきちんと書ければ，計算はあまり難しくない。ちょっと計算が必要なので，レベル 2.5 くらい。(3) は，標本平均 $\overline{Y}$ の分布が正確に書けるか否かが分かれ目。レベル 2 かな。

(4),(5) は，無作為抽出や確率による結論の意味をきちんと理解しているかどうかを問う問題。まあ，いい問題だよ。ただし，レベル 3 だね。

第 4 問　初項 3，公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項 3，公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし，$p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらにこれらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3,\ \cdots) \quad \cdots ①$$

解答）

(1) p と r の値を求めよう。自然数 n について，$a_n,\ a_{n+1},\ b_n$ はそれぞれ

$$a_n = 3 + (n-1)p \quad \cdots ②,\quad a_{n+1} = 3 + np \quad \cdots ③,\quad b_n = 3\,r^{n-1}$$

と表される。$r \neq 0$ により，すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから，①の両辺を b_n で割ることにより

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} a_n - 2a_{n+1} + 3\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0 \quad \to \quad r a_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$$

$$\therefore \quad 2\,a_{n+1} = r(a_n + 3) \quad \cdots ④$$

が成り立つことがわかる。④に②と ③を代入すると

$$2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\} \quad \to \quad 6+2np = 6r+rnp-rp \quad \to \quad 6-6r+rp = (r-2)np$$

$$\therefore (r-2)p\,n = r(p-6)+6 \qquad \cdots ⑤$$

となる。⑤がすべての n でなりたつこと，および $p \neq 0$ により，$r = 2$ を得る。さらに，$2(p-6)+6 = 0$ から，$p = 3$ を得る。

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

(2) $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求める。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 3k = 3\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 3\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 3(1+2+2^2+\ \cdots\ +2^{n-1}) = 3\,(2^n - 1).$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4\,a_{n+1} c_n + 3\,c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3,\ \cdots) \qquad \cdots ⑥$$

a_n が正であることから，⑥を変形して，

$$c_{n+1}(a_n+3)=4\,a_{n+1}c_n \quad \rightarrow \quad c_{n+1}=\frac{4\,a_{n+1}}{a_n+3}c_n$$

を得る。さらに，$p=3$ であることから，$c_{n+1}=4\,c_n$ となるので，数列 $\{c_n\}$ は ② 公比が 1 より大きい等比数列である　ことがわかる。

(4) q, u は定数で，$q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_nb_{n+1}-q\,d_{n+1}b_n+u\,b_{n+1}=0 \qquad (n=1,2,3,\ \cdots) \quad \cdots \quad ⑦$$

$r=2$ であることから，⑦を変形して

$$3\cdot 2^nd_n-3\cdot 2^{n-1}qd_{n+1}+3\cdot 2^nu=0 \quad \rightarrow \quad 6d_n-3qd_{n+1}+6u=0 \quad \therefore \quad d_{n+1}=\frac{2}{q}(d_n+u)$$

を得る。従って，数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$q>2$ かつ $u=0$ である。なぜならば，漸化式が　$d_{n+1}=r\,d_n\ \ (0<r<1,\ d_1 \neq 0)$ を満たせばよいからである。

解説）等差数列と等比数列（or 2 つの数列）がコラボレーションした不思議な問題ですね。ちょっと変わった問題ですが，難しくはないね。(1) は数列全般の知識が必要なので，また計算もそこそこ必要なので，まあいい問題だね。レベル 2 かな。(2) は計算だけなので，レベル 3 かな。(3) は計算が少々必要だね。レベル 2.5 位だね。(1),(3),(4) と似たような問題が 3 つも続くと，しつこいね。(4) もレベル 2.5 かな。(3),(4) では，新しい数列の初項を 3 にしてますが，これは 0 でなければ何でもいいですね。特に 3 である必要はないよね。

内容のバランスを考えると，(4) は，(1),(2),(3) とは関係ない全く別の問題にした方が良かったよね。

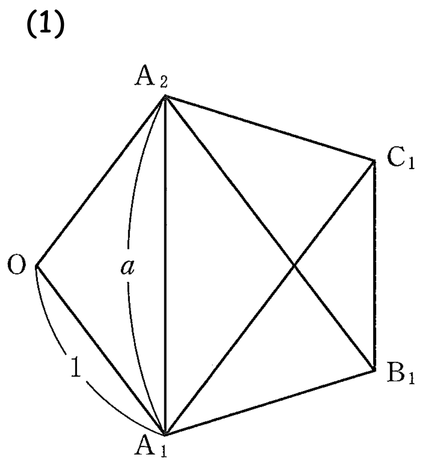
第 5 問　1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを a とする。

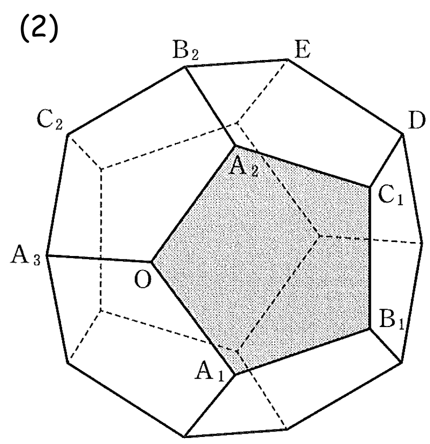
解答）正五角形の 1 つの内角は 108° であることに注意せよ。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形を $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ とする（下図，左）。

$\angle \mathrm{A_1C_1B_1}=36^\circ$，$\angle \mathrm{C_1A_1A_2}=36^\circ$　となることから，$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}$ は平行である。ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}} \quad \text{であるから} \quad \overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}=\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{a}(\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\,). \quad \cdots \quad ①$$





正五角形，正十二面体

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}$ も平行であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{B_1A_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2O}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}} \\ &= a\,\overrightarrow{\mathrm{A_1O}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2O}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = -a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \\ &= (a-1)\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \right) \quad \cdots \quad ②\end{aligned}$$

となる。したがって，①,②より，$\dfrac{1}{a} = a - 1$ が成り立つ。$a > 0$ に注意して，これを解くと

$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2) 1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える（上図，右）。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。
面 $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ に着目する。$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \quad \cdots \quad ①$$

である。また，

$$\left| \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \right|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|^2 = a^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots \quad ②$$

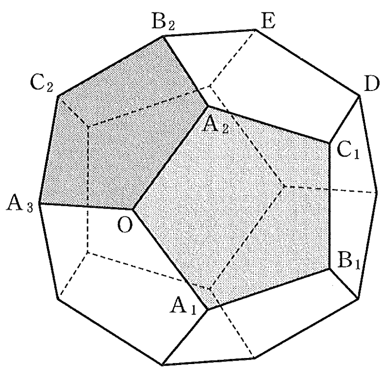
に注意すると，

$$\left| \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \right|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}|^2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}|^2 \quad \cdots \quad ③$$

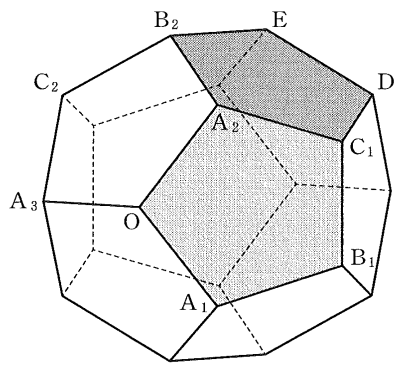
より，③に ②を代入して $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 2 - 2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ ． 従って，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \quad \cdots \quad ④$$

(3)



(4)



正十二面体

次に，面 $\mathrm{OA_2B_2C_2A_3}$ に着目すると（上図 (3) 参照），$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ $\cdots$ ⑤
である。さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \cdots \quad ⑥$$

が成り立つことがわかる。ゆえに，④,⑤,⑥を使って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \right) = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},\end{aligned}$$

同様に，①,④,⑤,⑥を使って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} &= (\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\left(\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\,\right)+a^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}(1+a+a^2)+a=\frac{1-\sqrt{5}}{4}(3+\sqrt{5})+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}$ は垂直であることがわかった。

最後に，面 $\mathrm{A_2C_1DEB_2}$ に着目する（上図 (4) 参照)。

$$\overrightarrow{\mathrm{B_2D}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{A_2C_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$$

であることに注意すると，4 点 $\mathrm{O,B_1,D,B_2}$ は同一平面上にあり，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は ⓪ 正方形である ことがわかる。なぜならば，4 つの辺は長さが等しく，内角は全て 90^o だからである。

解説）これはいい問題ですよ。穴埋めの問題にするのはもったいないよね。”1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ” とか，最後の問題は ”四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ はどんな四角形か”というような問題だと面白いね。やる気が出るね。

(1) は易しいのもあるけど，けっこう計算も必要なのでレベル 2 だね。(2) は，能率よくかつ慎重に計算をしないと間違えそうな問題ばかりだね。この試験では，1 番難しいところかな。レベル 1.5 だね。結局，選択問題は，第 3 問と第 4 問を選んだ方が楽だったかな。

今年は共通テスト元年ということで，初めての共通テストであった。世の中はコロナ禍で騒然としていて，受験生も健全な精神状態ではなかったかもしれない。このような状況の中で行われた今回のテストは，去年までのセンター試験よりは良くなっているように思う。というのは，今までのテストはただひたすら計算して穴を埋めていくというものであったが，今回のテストは，ちょっと考えなければならない問題が増えたように思う。例えば，第 1 問 $\boxed{\text{ネ}}$，第 2 問 $\boxed{\text{ナ}}$，第 3 問 $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$，第 4 問 $\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$，第 5 問 $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ などである。答えを選ぶ，5 択問題や 10 択問題は，適度にあったほうがいいと思う。しかし，考え方や推論の機微を見るような試験は，このような一斉試験では無理でしょう。大学が独自に行う試験では可能だよね。

問題作成者には，出題範囲が偏らない，また計算だけではない，エレガントで，楽しくて，意味のあるいい問題（試験のためだけの問題とは異なるもの）を作っていただきたい。

（2 月 2 日 ’21 完， おとといのジョー）